Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Тема за 9 клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър p, за които уравнението $x^2+(p^2+1)x+p=2$ има два различни реални корена x_1 и x_2 такива, че

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}.$$

Задача 2. В $\triangle ABC$, $AB>BC$, точка K от страната AB е такава, че $AK=BC+BK$. Права ℓ минава през K и е перпендикулярна на AB. Да се докаже, че ℓ, симетралата на AC и външната ъглополовяща при върха B се пресичат в една точка.

Задача 3. Някои от полетата на квадратна таблица $n\times n$ са минирани. Във всяко поле е записано цяло число от 0 до 9, равно на броя на минираните полета сред това поле и съседните му (тези, които имат обща страна или връх с него). Винаги ли е възможно по тази информация да се определи кои полета са минирани, ако:

а) $n=2000$; б) $n=2007$?

Задача 4. Да се намерят всички естествени числа x и y, за които числото $(x^2+y)(y^2+x)$ е точна пета степен на просто число.

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Тема за 10 клас

Задача 1. Дадени са функциите $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ и $g(x) = x^2 - x + 2$. Да се определи за кои стойности на x:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е естествено число;

б) е изпълнено неравенството $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{2}$.

Задача 2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който са спуснати височините BB_1 и CC_1 към страните AC и AB ($B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$). Нека M и N са съответно средите на BB_1 и CC_1, $P = AM \cap CC_1$ и $Q = AN \cap BB_1$. Да се докаже, че

а) точките M, N, P и Q лежат на една окръжност;

б) ако точките B, C, P и Q лежат на една окръжност, то $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа x, y, за които $xy^2 + 2y$ дели $2x^2y + xy^2 + 8x$.

Задача 4. Група от k човека, всеки двама от които се познават, наричаме k-компания.

а) Да се намери минималният брой познанства в група от n човека така, че след запознаване на кои да е двама непознати възниква нова 3-компания.

б) Да се намери минималният брой познанства в група от n човека така, че след запознаване на кои да е двама непознати възниква нова 4-компания.

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Тема за 11 клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x - a^2 + a = 0$$

има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

Задача 2. В $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$). Правата A_1B_1 пресича описаната около триъгълника окръжност в точки A_2 и B_2.

а) Да се докаже, че правата OI е успоредна на A_1B_1, където O и I са съответно центърът на описаната и на вписаната окръжност за триъгълника ABC.

б) Ако R е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C, а P и Q са съответно средите на A_1B_1 и A_2B_2, да се докаже, че $RP = RQ$.

Задача 3. Имаме хартиена лента с дължина 2007. Разрязваме лентата на две части и записваме дължините на двете парчета. След това разрязваме едно от двете парчета на две части и отново записваме дължините на новополучените парчета. Продължаваме по този начин докато всички парчета са с дължина 1. Едно разрязване наричаме "лошо", ако двете получени части не са с равни дължини.

а) Да се намери минималния възможен брой "лоши" разрязвания.

б) Да се докаже, че за всички случаи с минимален брой лоши разрязвания броят на различните записани числа е един и същ.

Задача 4. За всяко естествено число n полагаме $a_n = 0$, ако броят на делителите на n, които са по-големи от 2007, е четно число, и $a_n = 1$, ако този брой е нечетно число. Да се определи дали числото $\alpha = 0,a_1a_2a_3\dots a_k\dots$ е рационално.

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Тема за 12 клас

Задача 1. Даден е куб с ръб 1. Прекарана е равнина, която минава през връх на основата на куба и центровете на двете околни стени, които не го съдържат. Да се намери отношението, в което сечението на равнината с куба дели неговия обем.

Задача 2. Нека ABC е правоъгълен триъгълник с катети $AC = 1$ и $BC = 2$. През точка A_1 от катета BC, за която $A_1C \neq \frac{1}{3}$, е прекарана права, успоредна на AB, която пресича AC в точка B_1. Нека C_1 е петата на перпендикуляра от B_1 към AB. През C_1 е прекарана права, успоредна на AC, която пресича BC в точка A_2. Правата през A_2, успоредна на AB, пресича AC в точка B_2 и т. н. Да се пресметне:

а) $\dfrac{3A_2C-1}{3A_1C-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} S_{A_nB_nC_n}$.

Задача 3. Александър и Деница играят следната игра. Александър разрязва (ако е възможно) лента с целочислена дължина на три ленти с целочислени дължини, от които само една е най-дълга. С тази най-дълга лента Деница извършва подобна операция и т.н. Играта печели този, който последен може да разреже получената от другия лента. За кои ленти с дължини точни степени (т.е. a^b, $a-1, b-1 \in \mathbb{N}$) Деница има печеливша стратегия?

Задача 4. Да се намерят всички естествени числа n такива, че ако $a, b, c \geq 0$ и $a+b+c=3$, то $abc(a^n+b^n+c^n) \leq 3$.

Време за работа: 4.5 часа