Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Кратки решения на задачите

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър p, за които уравнението $x^2 + (p^2 + 1)x + p = 2$ има два различни реални корена x_1 и x_2 такива, че

$$\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}.$$

Решение. По формулите на Виет $x_1 + x_2 = -(p^2 + 1)$ и $x_1x_2 = p - 2 \neq 0$. Даденото условие е еквивалентно на $2x_1^2 - x_1 + 2x_2^2 - x_2 = x_1^2x_2^2 + 55$, откъдето лесно получаваме $2p^4 + 4p^2 - 48 = 0$. Това биквадратно уравнение има два реални корена, $p_1 = 2$ и $p_2 = -2$, но първият от тях дава $x_1x_2 = 0$, което е невъзможно. При $p = -2$ получаваме уравнението $x^2 + 5x - 4 = 0$, чиито корени наистина са реални.

Задача 9.2. В $\triangle ABC$, $AB > BC$, точка K от страната AB е такава, че $AK = BC + BK$. Права ℓ минава през K и е перпендикулярна на AB. Да се докаже, че ℓ, симетралата на AC и външната ъглополовяща при върха B се пресичат в една точка.

Решение. Първи начин. Нека точка $C' \in \overrightarrow{AB}$ е такава, че $BC = BC'$. Тогава външната ъглополовяща на $\sphericalangle B$ е симетралата на CC'. Тъй като $AK = BC + BK = BC' + BK = KC'$, то ℓ е симетралата на AC'. Получихме, че ℓ, симетралата на AC и външната ъглополовяща при върха B представляват симетрали на страните на $\triangle AC'C$ и следователно се пресичат в центъра на описаната около този триъгълник окръжност.

Втори начин. Нека k е описаната около $\triangle ABC$ окръжност и P е средата на дъгата AC, съдържаща точка B. Тогава симетралата на AC и външната ъглополовяща при върха B минават през точка P и остава да докажем, че ℓ също минава през P.

Нека $K' \in AB$ е такава, че $PK' \perp AB$. Достатъчно е да покажем, че $AK' = BC + BK'$. Нека $PM \perp BC$, $M \in BC$. Тогава B е между C и M, $BM = BK'$ поради свойството на ъглополовящата и следователно $BC + BK' = CB + BM = CM$. От друга страна, $\triangle AK'P \cong CMP$ ($AP = CP$, $PK' = PM$ и $\sphericalangle AK'P = \sphericalangle CMP = 90°$), откъдето $AK' = CM = BC + BK'$.

Задача 9.3. Някои от полетата на квадратна таблица $n \times n$ са минирани. Във всяко поле е записано цяло число от 0 до 9, равно на броя на минираните полета сред това поле и съседните му (тези, които имат обща страна или връх с него). Винаги ли е възможно по тази информация да се определи кои полета са минирани, ако:

а) $n = 2000$; б) $n = 2007$?

Решение. Да номерираме редовете $i = 1, \dots, n$ и стълбовете $j = 1, \dots, n$ и да означим с $a(i;j)$ числото в поле $(i;j)$, където i е номерът на реда, а j е номерът от стълба.

а) Не! Да разгледаме таблица A, в която са минирани полетата, за които $i \equiv j \equiv 1 \pmod 3$, и таблица B, в която са минирани полетата, за които $i \equiv j \equiv 2 \pmod 3$. Тогава във всички полета на A и B е записано числото 1 и тази информация не е достатъчна, за да разпознаем двете различни таблици.

б) Да! Първо да определим минираните полета в ред 3. Лесно се вижда, че броят $b(j)$ на минираните полета измежду $(3; j-1)$, $(3;j)$, $(3; j+1)$ е равен на $a(2;j) - a(1;j)$. Сравнявайки $b(1)$ и $b(2)$, откриваме дали (3;3) е минирано. Сега сравнявайки $b(4)$ и $b(5)$, откриваме дали (3;6) е минирано. Продължавайки по такъв начин, откриваме дали (3;9), (3;12), ..., (3;2007) са минирани.

Сравнявайки $b(2007)$ и $b(2006)$, откриваме дали (3;2005) е минирано. Сега сравнявайки $b(2004)$ и $b(2003)$, откриваме дали (3;2002) е минирано. Продължавайки по такъв начин, откриваме дали (3;1999), (3;1996), ..., (3;1) са минирани. Сега от $b(1)$ разбираме дали $(3;2)$ е минирано. Сега сравнявайки $b(3)$ и $b(4)$, откриваме дали (3;5) е минирано. Продължавайки по такъв начин, откриваме дали (3;8), (3;11), ..., (3;2006) са минирани. Ред 3 стана известен.

По подобен начин можем да определим и минираните полета в ред 6. Сравнявайки $a(4;j)$ и $a(5;j)$ с вече известната информация от ред 3, можем да открием броя на минираните полета сред $(6; j-1)$, $(6;j)$, $(6; j+1)$. Следвайки схемата от ред 3, откриваме отляво надясно минираните полета, за които $j \equiv 0 \pmod 3$, отдясно наляво минираните полета, за които $j \equiv 1 \pmod 3$, и накрая отляво надясно минираните полета, за които $j \equiv 2 \pmod 3$. Ред 6 стана известен.

Аналогично определяме минираните полета на редовете $9, 12, 15, \dots, 2007$.

Започвайки от другата страна на таблицата, по подобен начин определяме минираните полета в редове $2005, 2002, 1999, \dots, 4, 1$. Накрая пак така определяме и тези в редове $2, 5, 8, \dots, 2006$.

Забележка. Отговорът е „не”, ако $n \equiv 2 \pmod 3$, и „да” в противен случай.

Задача 9.4. Да се намерят всички естествени числа x и y, за които числото $(x^2 + y)(y^2 + x)$ е точна пета степен на просто число.

Решение. Нека $(x^2 + y)(y^2 + x) = p^5$, където p е просто число. Тогава $x^2 + y = p^s$, $y^2 + x = p^t$, където $\{s, t\} = \{1, 4\}$ или $\{2, 3\}$. В първия случай без ограничение на общността можем да считаме, че $x^2 + y = p$, $y^2 + x = p^4$. Тогава $p > x^2$ и от $p | y(x^2 + y) - (y^2 + x) = x(xy - 1)$ следва, че $p | xy - 1$. Сега от $p | x(x^2 + y) - (xy - 1)$ заключаваме, че $p | x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, т.е. $p | x + 1$ или $p | x^2 - x + 1$, което противоречи на $p > x^2$.

Нека $x^2 + y = p^2$, $y^2 + x = p^3$. Тогава $p > x$ и както по-горе виждаме, че $p | x + 1$ или $p | x^2 - x + 1$.

Случай 1. Нека $p|x+1$. Тогава $p = x+1$ и лесно намираме решението $x = 2$, $y = 5$.

Случай 2. Нека $p|x^2 - x + 1$, но $p \nmid x + 1$. Тогава $p|y^2 - y + 1$, но $p \nmid y + 1$.

Имаме $p|x^2+y = (x^2-x+1)+(x+y-1)$, т.е. $p|x+y-1$. Да положим $x^2-x+1 = ap^m$, $y^2 - y + 1 = bp^n$ и $x + y - 1 = cp^\ell$, където $(a, p) = (b, p) = (c, p) = 1$, $a, b, c, m, n, \ell \in \mathbb{N}$. От $ap^m = x^2 - x + 1 < x^2 + y = p^2$ следва, че $m = 1$, и аналогично от $cp^\ell = x + y - 1 < x^2 + y = p^2$ следва, че $\ell = 1$. Тогава $p^2 = x^2 + y = (a + c)p$, т.е. $a + c = p$.

Освен това, от $p^3 = y^2 + x = y^2 - y + 1 + x + y - 1 = bp^n + cp$ заключаваме, че $n = 1$ и $b + c = p^2$. Следователно $b - a = p^2 - p$ и имаме

$$p^2(p - 1) = (a - b)p = (x^2 - x + 1) - (y^2 - y + 1) = (x - y)(x + y - 1) = cp(x - y),$$

което означава, че $p|x - y$. Оттук и от $p|x + y - 1$ следва, че $p|2x - 1$. Тогава от $p|x^2 - x + 1 = (x^2 + x) - (2x - 1)$ следва $p|x(x + 1)$, противоречие.

Окончателно, решенията са $(2, 5)$ и $(5, 2)$.

Забележка. Може да се докаже, че $(x^2 + y)(y^2 + x)$ е точна степен на просто число само в горните случаи и при $x = y = 1$.

Задача 10.1. Дадени са функциите $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ и $g(x) = x^2 - x + 2$. Да се определи, за кои стойности на x:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е естествено число;

б) е изпълнено неравенството $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{2}$.

Решение. а) Полагаме $f(x)/g(x) = k$. След преобразуване достигаме до уравнението

$$(2 - k)x^2 + (2 + k)x - 2(2 + k) = 0.$$

Ако $k = 2$, то $x = 2$. Нека сега $k \neq 2$. Тогава горното уравнение е квадратно и има реални корени. Следователно $D = (2 + k)(18 - 7k) \geq 0$ и $k \in [-2, \frac{18}{7}]$. Тъй като k е естествено число, различно от 2, получаваме $k = 1$ и $x_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{33})/2$. Окончателно търсените стойности за x са три: $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2}, x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2}, x_3 = 2$.

б) Множеството от допустими стойности за x е $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. Лесно се проверява, че за всяко x от това обединение е изпълнено $g(x) \geq 2$. Следователно, $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{2}$ за $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

Задача 10.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който са спуснати височините BB_1 и CC_1 към страните AC и AB ($B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$). Нека M и N са съответно средите на BB_1 и CC_1, $P = AM \cap CC_1$ и $Q = AN \cap BB_1$. Да се докаже, че

а) точките M, N, P и Q лежат на една окръжност;

б) ако точките B, C, P и Q лежат на една окръжност, то $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Решение. а) $\triangle ACC_1 \cong \triangle ABB_1$, следователно AN и AM са съответни медиани в подобни триъгълници. Оттук

$$\angle ANC_1 = \angle AMB_1 \Rightarrow \angle QNB = \angle PMQ,$$

т.е. точките M, N, P, Q лежат на една окръжност.

б) Ако точките B, C, P, Q лежат на една окръжност, то $\angle QCP = \angle QBP$. Но $\angle ACC_1 = \angle ABB_1$, следователно

$$\angle QCA = \angle PBA. \tag{1}$$

От друга страна, от подобието на $\triangle ACC_1$ и $\triangle ABB_1$ имаме

$$\angle CAQ = \angle CAN = \angle BAM = \angle BAP. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че $\triangle ACQ \cong \triangle ABP$, откъдето

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AQ}{AP} = \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC},$$

т.е. $AB^2 = AC^2$ и $AB = AC$.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа x, y, за които $xy^2 + 2y$ дели $2x^2y + xy^2 + 8x$.

Решение. Очевидно $xy^2 + 2y$ дели

$$(2x + y)(xy^2 + 2y) - y(2x^2y + xy^2 + 8x) = 2y^2 - 4xy,$$

т.е. $xy + 2$ дели $2y - 4x$.

1) Нека $2y - 4x \geq 0$.

1.1) Ако $x \geq 2$ имаме $xy+2 > 2y-4x$ и следователно $2y-4x = 0$. Оттук получаваме $x = a, y = 2a$. Непоредствено се получава, че в този случай $xy^2 + 2y = 4a(a^2 + 1)$ дели $2x^2y + xy^2 + 8x = 8a(a^2 + 1)$.

1.2) Ако $x = 1$, to $y^2 + 2y$ дели 8, t.e. $y = 2$. Това решение се съдържа в тези от 1.1).

2) Нека $2y - 4x < 0$, т.е. $4x - 2y > 0$. Ако $y \geq 4$, $xy + 2 > 4x - 2$. Следователно $y = 1, 2$ или 3.

2.1) В случая $y = 1$ числото $\dfrac{2x^2 + 9x}{x + 2} = 2x+5-\dfrac{10}{x + 2}$ е цяло, откъдето получаваме решенията $x = 3, y = 1$ и $x = 8, y = 1$.

2.2) В случая $y = 2$ числото $\dfrac{x^2 + 3x}{x + 1} = x+2-\dfrac{2}{x + 1}$ е цяло, т.е. $x = 1$. Това решение се съдържа в тези от 1.1).

2.3) В случая $y = 3$ числото $\dfrac{6x^2+17x}{9x+6}$ е цяло. Оттук следва, че $3|x$, т.е. $x = 3k$. След заместване и съкращаване получаваме, че числото $\dfrac{18k^2+17k}{9k+2} = (2k+1)+\dfrac{4k-2}{9k+2}$ е цяло, което е невъзможно при $k \geq 1$.

Окончателно имаме решенията $x = a, y = 2a$ за всички естествени a и $x = 3, y = 1$, $x = 8, y = 1$.

Задача 10.4. Група от k човека, всеки двама от които се познават, наричаме k-компания.

а) Да се намери минималният брой познанства в група от n човека така, че след запознаване на кои да е двама непознати възниква нова 3-компания.

б) Да се намери минималният брой познанства в група от n човека така, че след запознаване на кои да е двама непознати възниква нова 4-компания.

Решение. На езика на графите задачата се формулира по следния начин:

Да се намери минималния брой ребра в граф с n върха имащ свойството:

а) Добавянето на кое да е ново ребро води до поява на несъществуващ до момента триъгълник (3-клика).

б) Добавянето на кое да е ново ребро води до поява на нова (несъществуваща до момента) 4-клика.

а) Нека G е граф с исканото свойство, имащ n върха и минимален брой ребра. Да допуснем противното. Добавянето на ребро, свързващо два върха от различни компоненти на свързаност не води до поява на 3-клика. Минималният брой ребра в свързан граф с n върха е $n-1$. Следователно G има поне $n-1$ ребра. Лесно можем да посочим пример на граф с n върха и $n-1$ ребра, имащ желаното свойство. Това е например $K_{1,n-1}$. ($K_{m,n}$ се дефинира като граф с $m+n$ върха, които се разбиват на две множества с m и n елемента, съответно. Два върха са съседни тогава и само тогава, когато принадлежат на различни множества. Така броят на ребрата е mn.)

б) Да дефинираме граф с върхове $u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{n-2}$, и ребра – всички двойки u_iv_j, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, n-2$, заедно с u_1u_2. Този граф е с n върха, $2n-3$ ребра и добавянето на ребро увеличава броя на 4-кликите. Следователно търсеният минимален брой ребра не надхвърля $2n-3$. Ще докажем чрез индукция по n, че той е точно $2n-3$. Нещо повече – равенство се достига за граф, имащ описаната по-горе структура. Това твърдение е очевидно за $n = 4$.

Нека G е граф с n върха, имащ исканото свойство, в който броят на ребрата е минимален. Приемаме, че твърдението е доказано за графи с $n-1$ и по-малко върха. От факта, че добавянето на ребро води до увеличаване на броя на 4-кликите следва, че в G съществуват върхове x_1, x_2, x_3, x_4, между които има точно 5 ребра (ще считаме, че липсващотот ребро е x_1x_2). Нека G^* е графът, получен чрез идентифициране на върховете x_1 и x_2. (По-подробно: от G премахваме върховете x_1 и x_2, добавяме нов връх u и запазваме всички останали върхове. Новият връх е съседен с онези върхове, които са били съседни на поне един от x_1 и x_2; всички ребра между стари върхове се запазват.) Очевидно G^* е граф с $n-1$ върха и притежава свойството от уловието: добавянето на ребро увеличава броя на 4-кликите. От друга страна, ако с $e(G)$ означим броя на ребрата в G, имаме $e(G^*) \leq e(G) - 2 \leq 2n - 5 = 2(n-1) - 3$. Следователно, съгласно индукционното допускане, $e(G^*) = 2n - 3$ и G^* има описаната в началото структура: два върха от степен $n-2$ и всички останали от степен 2. Поне един от върховете от степен $n-2$ е x_3 или x_4, да речем x_3. Следователно степента на x_3 в G е $n-1$.

Конструираме от G нов граф G' като изтрием върха x_3 и всички ребра, инцидентни с него. Графът G' има не повече от $n-2$ ребра, тъй като G има не повече от $2n-3$ ребра. Освен това G' притежава свойството от т. (а): добавянето на произволно ребро в него води до поява на нова 3-клика. Следователно, $G' = K_{1,n-2}$ (ot т. (а)). Сега лесно се получава, че G има описаната в началото структура.

Забележка. В сила е следният по-общ резултат:

Минималният брой ребра в граф G с n върха, имащ свойството, че добавянето на ново ребро води до появяване на нова r-клика е

$$e(G) = \binom{r-2}{2} + (n-r+2)(r-2).$$

Освен това $G = K_{r-2} + E_{n-r+2}$, където K_{r-2} е пълният граф с $r-2$ върха, а E_{n-r+2} е графът с $n-r+2$ върха и без ребра.

(Ако $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ са графи, то $G_1 + G_2$ се дефинира като граф с върхове $V_1 \cup V_2$ и ребра $E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2$.)

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^3 - ax^2 + (a^2-1)x - a^2 + a = 0$$

има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

Решение. Записваме уравнението във вида

$$(x-1)(x^2 + (1-a)x - a + a^2) = 0,$$

откъдето намираме $x_1 = 1$. Нека x_2 и x_3 са корените на квадратното уравнение. Ако 1 е средният член на прогресията, то $x_2 + x_3 = 2$, откъдето $a - 1 = 2$, т.е. $a = 3$. При $a = 3$ корените на квадратното уравнение не са реални.

Ако $x_1 = 1$ не е среден член, то без ограничение можем да считаме, че $1 + x_2 = 2x_3$, което заедно с $x_2 + x_3 = a - 1$ дава $3x_3 = a$. Следователно $\dfrac{a}{3}$ е корен на квадратното

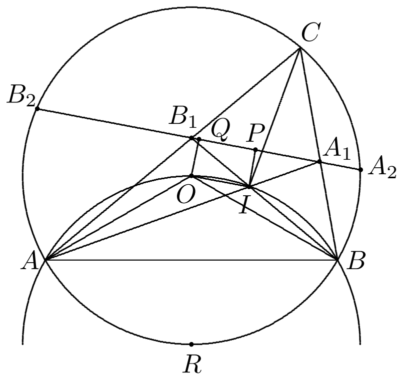
уравнение, т.е.
$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + (1-a)\frac{a}{3} - a + a^2 = 0,$$
откъдето намираме $a = 0$ и $a = \dfrac{6}{7}$. При $a = 0$ получаваме $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ и при $a = \dfrac{6}{7}$ намираме $x_2 = -\dfrac{3}{7}$ и $x_3 = \dfrac{2}{7}$. Търсените стойности са $a = 0$ и $a = \dfrac{6}{7}$.

Задача 11.2. В $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$). Правата A_1B_1 пресича описаната около триъгълника окръжност в точки A_2 и B_2.

а) Да се докаже, че правата OI е успоредна на A_1B_1, където O и I са съответно центърът на описаната и на вписаната окръжност за триъгълника ABC.

б) Ако R е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C, а P и Q са съответно средите на A_1B_1 и A_2B_2, да се докаже, че $RP = RQ$.

Решение. а) Тъй като $\sphericalangle AOB = 2\gamma = 120^\circ$ и $\sphericalangle AIB = 180^\circ - \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, то точките A, O, I и B лежат на една окръжност. Тъй като $RI = RA$ (следва от равенството $\sphericalangle RIA = \sphericalangle RAI = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$) и аналогично $RI = RB$, то центърът на тази окръжност е точката R. От равнобедрения $\triangle AOB$ намираме $\sphericalangle BAO = 30^\circ$ и следователно $\sphericalangle OIB_1 = 30^\circ$. Тъй като $\sphericalangle AIB = 120^\circ$, то около IA_1CB_1 може да се опише окръжност, откъдето следва, че $\sphericalangle IB_1A_1 = \sphericalangle ICA_1 = 30^\circ$ и $\sphericalangle IA_1B_1 = \sphericalangle ICB_1 = 30^\circ$. Понеже $\sphericalangle OIB_1 = IB_1A_1$, то $OI \parallel A_1B_1$.



б) Тъй като $OQ \perp A_2B_2$, $IP \perp A_2B_2$ (от равнобедрения $\triangle A_1IB_1$) и $OI \parallel A_2B_2$, то $OIPQ$ е правоъгълник и симетралата на OI съвпада със симетралата на PQ. Понеже симетралата на OI минава през R, то следва, че R лежи върху симетралата на PQ, т.е. $RP = RQ$.

Задача 11.3. Имаме хартиена лента с дължина 2007. Разрязваме лентата на две части и записваме дължините на двете парчета. След това разрязваме едно от двете парчета на две части и отново записваме дължините на новополучените парчета. Продължаваме по този начин докато всички парчета са с дължина 1. Едно разрязване наричаме ”лошо”, ако двете получени части не са с равни дължини.

а) Да се намери минималния възможен брой ”лоши” разрязвания.

б) Да се докаже, че за всички случаи с минимален брой лоши разрязвания броят на различните записани числа е един и същ.

Решение. а) Нека хартиената лента е с дължина n. Да означим с $g(n)$ и $f(n)$ съответно броят на единиците в двоичното представяне на n и минималния възможен брой лоши разрязвания. Ако $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_l}$ да разгледаме следната последователност от ходове: първо отрязваме парче с дължина 2^{k_1}, после парче с дължина 2^{k_2} и т.н. На последното разрязване получаваме две ленти с дължини $2^{k_{l-1}}$ и 2^{k_l}. Тъй като лента с дължина степен на двойката може да се разреже на части с дължина 1 без лоши ходове, то общо имаме $l-1$ лоши хода, т.е.

$$f(n) \le g(n) - 1. \tag{1}$$

Ще докажем с индукция по n, че $f(n) \ge g(n) - 1$. За $n = 1$ имаме $f(1) = 0$ и $g(1) = 1$, т.е. твърдението е вярно. Нека то е вярно за всички $n \le k$, където k е естествено число и да разгледаме числото $k+1$.

1. Нека първият ход е "лош" и са получени две ленти с дължини съответно a и b. Тогава $a + b = k + 1$ и $f(k+1) = 1 + f(a) + f(b)$. Ако двоичните представяния на a и b нямат единици на една и съща позиция, то $g(k+1) = g(a) + g(b)$ и следователно

$$f(k+1) = 1 + f(a) + f(b) = 1 + g(a) - 1 + g(b) - 1 = g(k+1) - 1.$$

Ако двоичните представяния на a и b имат поне една единица на една и съща позиция, то $g(k+1) = g(a) + g(b) - 1$ и тогава

$$f(k+1) = 1 + f(a) + f(b) = 1 + g(a) - 1 + g(b) - 1 = g(k+1) > g(k+1) - 1.$$

2. Нека първият ход не е лош, т.е. лентата е разрязана на две части с равни дължини. Тогава $g(k+1) = g(a) = g(b)$ и тъй като при $g(k+1) = 1$ твърдението е очевидно, то имаме

$$f(k+1) = f(a) + f(b) = 2f(a) = 2g(a) - 2 = 2g(k+1) - 2 > g(k+1) - 1.$$

Следователно в този случай ще получим $f(k+1) > g(k+1) - 1$.

С това индукцията е завършена, откъдето

$$f(n) \ge g(n) - 1. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че $f(n) = g(n) - 1$.

а) Тъй като двоичното представяне на 2007 е 11111010111, т.е. $g(2007) = 9$, то получаваме, че $f(2007) = 8$.

б) От горните разсъждения следва, че ако $f(n) = g(n) - 1$ на всеки "лош" ход лентата се разрязва на части с дължини a и b така, че двоичните представяния на a и b нямат единица на една и съща позиция. Следователно двоичните представяния на всички такива числа са различни. Освен това добрите ходове се извършват само върху ленти с дължина степен на двойката. Ясно е, че чрез пренареждане на ходовете можем да считаме, че първо са извършени всички лоши ходове. Техният брой е $g(n)-1$ и при всеки лош ход се получават две нови числа. Следователно при лошите ходове всички записани числа са $2g(n)-2$. Степените на 2, които са записани, са всички степени до най-високата степен в двоичното представяне на n.

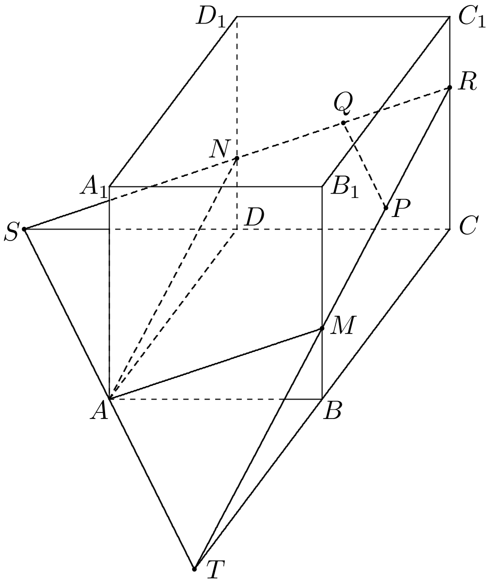
Следователно броят на различните числа е равен на $2g(n)-2+k+1=2g(n)+k-1$, където k е най-високата степен на 2 в двоичното представяне на n.

Задача 11.4. За всяко естествено число n полагаме $a_n=0$, ако броят на делителите на n, които са по-големи от 2007, е четно число, и $a_n=1$, ако този брой е нечетно число. Да се определи дали числото $\alpha=0,a_1a_2a_3\dots a_k\dots$ е рационално.

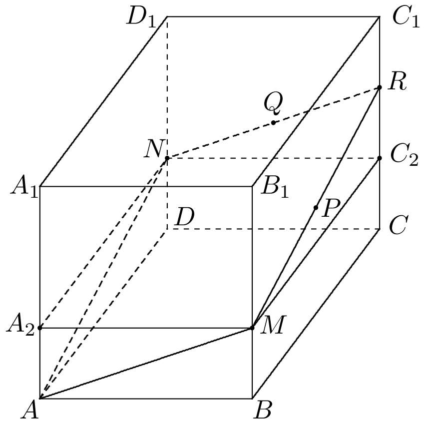
Решение. Ще докажем, че α е ирационално. Ще използваме, че ако редицата $a_1,a_2,a_3,\dots,a_k,\dots$ не е периодична от известно място, то числото $\alpha=0,a_1a_2\dots a_k\dots$ е ирационално. Да допуснем, че α е рационално, т.е. че от известно място разглежданата редица е периодична. Това означава, че съществуват k_0 и T, такива, че за всяко $k>k_0$ е изпълнено $a_k=a_{k+T}$. Избираме естествено число m, за което $mT>k_0$ и mT е точен квадрат. Това е възможно, защото ако $T=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}$ е каноничното разлагане на T, то достатъчно е да изберем $m=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_s^{\beta_s}$, където $\alpha_i+\beta_i$ е четно число за всяко $i=1,2,\dots,s$ и числата β_i са достатъчно големи. Да изберем просто число $p>2007$, $p\neq p_i$, $i=1,2,\dots,s$. Тъй като $pmT-mT$ е кратно на T, то $a_{mT}=a_{pmT}$. Но ако $\tau(k)$ е броят на делителите на k, а $f(k)$ е броят на тези, които са по-големи от 2007, то $f(pmT)=f(mT)+\tau(mT)$ и понеже $\tau(mT)$ е нечетно число, то $f(pmT)$ и $f(mT)$ са с различна четност, което е противоречие.

Задача 12.1. Даден е куб с ръб 1. Прекарана е равнина, която минава през връх на основата на куба и центровете на двете околни стени, които не го съдържат. Да се намери отношението, в което сечението на равнината с куба дели неговия обем.

Решение. Нека P и Q са центровете на стените BCC_1B_1 и DCC_1D, и нека $\alpha=(APQ)$ (черт. 1). Тъй като PQ е средна отсечка в $\triangle DBC_1$, то $PQ||BD$. Следователно α пресича $(ABCD)$ в правата през A, която е успоредна на BD. Означаваме с T и S пресечните точки на тази права с правите CB и CD. Правите TP и SQ пресичат ръба CC_1 в една и съща точка R (пресечната точка на α и CC_1). Нека $M=TR\cap BB_1$ и $N=SR\cap DD_1$. Тогава сечението на α с куба е четириъгълникът $AMRN$ (лесно се вижда, че той е ромб). Ясно е, че $BT=BA=1$. Следователно BM е средна отсечка в $\triangle CRT$. Тъй като $BM=RC_1=1-RC$ и $\dfrac{BM}{RC}=\dfrac{1}{2}$, то $BM=\dfrac{1}{3}$. Аналогично $DN=\dfrac{1}{3}$.



черт. 1



черт. 2

Нека V е обемът на многостена ограничен от $(ABCD)$, $(AMRN)$ и околните стени на куба (черт. 2). Нека A_2 и C_2 са пресечните точки на AA_1 и CC_1 с равнината през MN, която е успоредна на $(ABCD)$. Тогава $RC_2 = RC - CC_2 = MB = AA_2 = \dfrac{1}{3}$ и следователно триъгълните пирамиди NMC_2R и NMA_2A имат равни обеми. Това показва, че $V = V_{ABCDA_2MC_2N} = \dfrac{1}{3}$. Следователно сечението дели обема на куба в отношение 1 : 2 (считано от основата ABCD).

Задача 12.2. Нека ABC е правоъгълен триъгълник с катети $AC = 1$ и $BC = 2$. През точка A_1 от катета BC, за която $A_1C \neq \dfrac{1}{3}$, е прекарана права, успоредна на AB, която пресича AC в точка B_1. Нека C_1 е петата на перпендикуляра от B_1 към AB. През C_1 е прекарана права, успоредна на AC, която пресича BC в точка A_2. Правата през A_2, успоредна на AB, пресича AC в точка B_2 и т. н. Да се пресметне:

а) $\dfrac{3A_2C - 1}{3A_1C - 1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} S_{A_nB_nC_n}$.

Решение. а) Нека $A_nC = x_n$. Тогава от $\triangle A_nB_nC \sim \triangle BAC$ следва, че $B_nC = \dfrac{x_n}{2}$. Понеже $\triangle AB_nC_n \sim \triangle ABC$, намираме, че $AC_n = \dfrac{2 - x_n}{2\sqrt{5}}$. Оттук $A_{n+1}C = x_{n+1} = \dfrac{2 - x_n}{5}$. Следователно $\dfrac{3x_{n+1} - 1}{3x_n - 1} = -\dfrac{1}{5}$.

б) Тъй като $A_nB_n = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x_n$, $B_nC_n = \dfrac{2 - x_n}{\sqrt{5}}$ и $A_nB_n \perp B_nC_n$, то $S_{A_nB_nC_n} =$

$\dfrac{x_n(2-x_n)}{4}$. От а) имаме, че $x_n - \dfrac{1}{3}$ е геометрична прогресия с частно $-\dfrac{1}{5}$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$ и значи $\lim\limits_{n\to\infty} S_{A_nB_nC_n} = \dfrac{5}{36}$.

Задача 12.3. Александър и Деница играят следната игра. Александър разрязва (ако е възможно) лента с целочислена дължина на три ленти с целочислени дължини, от които само една е най-дълга. С тази най-дълга лента Деница извършва подобна операция и т.н. Играта печели този, който последен може да разреже получената от другия лента. За кои ленти с дължини точни степени (т.е. a^b, $a-1, b-1 \in \mathbb{N}$) Деница има печеливша стратегия?

Решение. Да означим с n дължината на първоначалната лента. Ясно е, че няма ход при $n = 1, 2, 3$. При $4 \le n \le 3{+}2{+}2 = 7$ Александър може да разреже лентата така, че най-голямата дължина да е по-малка от 4 и значи печели. При $n = 8, 9$ най-голямата дължина е между 4 и 7 и Деница е в печеливша позиция след ход на Александър. Аналогично при $10 \le n \le 9+8+8 = 25$ Александър има печеливша стратегия, защото може да разреже лентата така, че най-голямата дължина да е 8 или 9 и т.н. По индукция следва, че Деница има печеливша стратегия точно когато $n = 3^k$ или $n = 3^k - 1$ за някое $k > 1$.

Числата от първия вид, както и $3^2 - 1 = 2^3$, са точно степени. Ще докажем, че други няма. Нека $a^b = 3^k - 1$. Понеже $a^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$, то b е нечетно. Тогава $(a+1)(a^{b-1} + \cdots + a + 1) = 3^k$. Оттук $a + 1 = 3^i$ и

$$3^{k-i} = a^{b-1} + \cdots + a + 1 = A(a+1) + b, \quad 0 < i < k.$$

Значи 3 дели b. За $c = a^{b/3}$ имаме, че $3^k = (c{+}1)((c{+}1)^2 {-} 3c)$. Следователно $c{+}1 = 3^j$ и $(c{+}1)^2 {-} 3c = 3^{k-j}$, $0 < j < k$. В частност, 9 дели $(c{+}1)^2$, но не дели $3c$. Последователно намираме, че $k - j = 1$, $c = 2$, $a = k = 2$ и $b = 3$.

Забележка. Втората част от решението е частен случай на нетривиалния факт, че 3^2 и 2^3 са единствените точни степени с разлика 1.

Задача 12.4. Да се намерят всички естествени числа n такива, че ако $a, b, c \ge 0$ и $a + b + c = 3$, то $abc(a^n + b^n + c^n) \le 3$.

Решение. При $a = 2, b = c = \dfrac{1}{2}$ и $n \ge 3$ неравенството не е изпълнено. От друга страна, при $n = 1$ то е еквивалентно на неравенството между средното аритметично и средното геометрично за три числа.

Ще докажем, че даденото неравенство е в сила и при $n = 2$. Нека $x = bc$. Тогава

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) = ax(a^2 + (b+c)^2 - 2x).$$

Функцията $x(p-2x)$ е растяща при $x \leq \dfrac{p}{4}$. Тъй като

$$bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} \leq \frac{a^2+(b+c)^2}{4},$$

следва, че ако $b+c = b'+c'$ и $bc \leq b'c'$, то

$$abc(a^2+b^2+c^2) \leq ab'c'(a^2+b'^2+c'^2). \tag{1}$$

Без ограничение можем да считаме, че $b \leq 1 \leq c$. Полагаме $b' = 1, c' = b+c-1$. Тъй като $b+c = b'+c'$ и $bc - b'c' = (b-1)(c-1) \leq 0$, то от (1) следва, че

$$abc(a^2+b^2+c^2) \leq a(2-a)(a^2+1+(2-a)^2). \tag{2}$$

Полагаме $d = (a-1)^2$. Тогава

$$a(2-a)(a^2+1+(2-a)^2) = (1-d)(3+2d) = 3-d-2d^2 \leq 3$$

и даденото неравенство при $n=2$ следва от (2).

Задачите са предложени от:
Петър Бойваленков - 9.1, 9.2, 9.4; Ивайло Кортезов - 9.3
Иван Ланджев - 10.1, 10.3, 10.4; Стоян Атанасов - 10.2
Александър Иванов - 11.1, 11.3, 11.4; Емил Колев - 11.2, 11.3
Николай Николов - 12.2, 12.3; Олег Мушкаров - 12.1, 12.4;
Автор на брошурата: Емил Колев
Редактори: Олег Мушкаров, Николай Николов